Universidade Federal da Paraiba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Depto de Matemática
Disciplina: Matemática Elementar II
Professor: Milton
Aluno:___________________________ Matricula:____________

Turno: Manhã
Data: 09/12/2012

Lista de exercícios

1. Considere o sistema de axiomas $\mathcal{V}$ formado por um conjunto não vazio V de "vetores" (espaço vetorial), onde os termos indefinidos são: vetores. O conjunto V é munido com duas operações

$$\begin{array}{ll} + : V \times V \to V & . : K \times V \to V \\ (u, v) \to u + v & (a, u) \to a.u \end{array}$$

chamadas *adição e multiplicação por escalar* tais que os seguintes axiomas são satisfeitos:

V_1−Sejam $u, v, w, t \in V$. Se $u = w$ e $v = t$, então $u + v = w + t$, isto é, a operação + está bem definida.

V_2− $u + (v + w) = (u + v) + w$, para todos $u, v, w \in V$.

V_3− Existe $0 \in V$ tal que $0 + v = v + 0 = 0$, para todo $v \in V$.

V_4− Para cada $u \in V$, existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$.

V_5− $u + v = v + u$, para todos $u, v \in V$.

V_6− Sejam $a, b \in K$ e $u, v \in V$, em que K é um corpo. Se $a = b$ e $u = v$ então $a.u = b.v$.

V_7− $(ab) .u = a. (b.u)$, para todos $a, b \in K$ e $u \in V$.

V_8 − $(a + b) .u = a.u + b.u$, para todos $a, b \in K$ e $u \in V$.

V_9 − $a. (u + v) = a.u + a.v$, para todos $a \in K$, e $u, v \in V$.

V_{10} − $1.u = u$, para todo $u \in V$.

(a) Mostre que o vetor $0 \in V$ é único.

(b) Mostre que o vetor $(-u)$ é único para cada $u \in V$.

(c) Mostre que existe um único vetor $x \in V$ para o qual $u + x = v$, para todos $u, v \in V$.

(d) Mostre que $a.0 = 0$, para todos $a \in K$.

(e) Mostre que se $u + u = u$, então $u = 0$.

(f) Mostre que se $a.u = 0$ então $a = 0$ ou $u = 0$, com $u \in V$ e $a \in K$.

(g) Mostre que $-u = (-1)\,.u$,para todo $u \in V$.

(h) Mostre que $(-a)\,.u = a.\,(-u) = -\,(a.u)$, para todos $a \in K$ e $u \in V$.

2. Mostre que o conjunto dos números complexos

$$\mathbb{C} = \left\{a + bi,\ \ a, b \in \mathbb{R},\ \ i^2 = -1\right\}$$

satisfaz o sistema de axiomas $\mathcal{V}$ com as operações usuais, onde $|K = \mathbb{R}$.

3. O sistema de axiomas $\mathcal{G}$ formado por um conjunto não vazio G de objetos (grupos). Termos indefinidos: Objetos. O conjunto G munido da operação binária

$$\begin{aligned} \cdot : \quad & G \times G \to G \\ & (a, b) \mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

chamada de *produto* tais que os seguintes axiomas são satisfeitos:

G_1- Sejam $a, b, c, d \in G$. Se $a = c$ e $b = d$ então $a \cdot b = c \cdot d$, isto é, a operação $\cdot$ está bem definida.

G_2- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para todos $a, b, c \in G$.

G_3-Existe $e \in G$ tal que $e \cdot a = a \cdot e = a$, para todos $a \in G$.

G_4- Para cada $a \in G$, existe $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

(a) Mostre que o elemento e é único em G.

(b) Mostre que o elemento a^{-1} é único para cada $a \in G$.

(c) Mostre que para quaisquer $a, b \in G$, as operações $a \cdot x = b$ e $y \cdot a = b$ possuem soluções únicas $x, y \in G$.

(d) Mostre que as funções $L_e : G \to G$ e $R_e : G \to G$ definidas como $L_e(x) = c \cdot x$ e $R_e\,(x) = x \cdot c$, respectivamente, são bijetoras, para todo $c \in G$ fixado.

4. Mostre que o conjunto das matrizes invertíveis

$$GL^2\,(\mathbb{R}) = \{A \in M_2\,(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$$

satisfaz o sistema de axiomas $\mathcal{G}$ com as operações usais de matrizes.

5. Mostre que o axioma F_9 do sistemas de axiomas $\mathcal{F}$ do exemplo K é independente.

6. Seja $\mathcal{V}$ o sistema de axiomas do exercício 1

   (a) Mostre que o conjunto de todos os números reais não nulos $\mathbb{R}^{+}$ com a multiplicação usual é um modelo para $\mathcal{G}$.

   (b) Mostre que o conjunto de todos os números racionais $\mathbb{Q}$ com a soma usual é um modelo para $\mathcal{G}$.

   (c) O sistema de axiomas $\mathcal{G}$ é consitente?

   (d) O sistema de axiomas $\mathcal{G}$ é categórico?

   (e) Mostre que cada axioma de $\mathcal{G}$ é independente.

7. Seja X um conjunto não vazio qualquer. Uma *relação binária* sobre X é uma função $\mathcal{R}$: $X \times X \to \{0,1\}$ definida como

$$\mathcal{R}(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \text{ está relacionado com } y \\ 0, \text{ se } x \text{ não está relacionado com } y. \end{cases}$$

   Quando $\mathcal{R}\ (x,y) = 1$ é conveniente escrever $x\mathcal{R}y$. Uma *relação de equivalência* sobre X é uma relação binária $\mathcal{R}$ sobre X tal que os seguintes axiomas são satisfeitos:

   $\mathrm{R}_1 - x\mathcal{R}x$, para todo $x \in X$.

   R_2- Se $x\mathcal{R}y$, então $y\mathcal{R}x$, para todos $x, y \in X$.

   R_3- Se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$ então $x\mathcal{R}z$, para todos $x, y, z \in X$.

   (a) Seja $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{*}$. Para $(a,b), (c,d) \in X$, definimos a relação binária

$$(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

   Mostre que X é um modelo para $\mathcal{R}$.

   (b) Seja $Y = \{1,2,3\}$. Definimos a relação binária

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$$

   Mostre que Y é um modelo para $\mathcal{R}$.

   (c) O sistema de axiomas $\mathcal{R}$ é consistente/

   (d) O sistema de axiomas $\mathcal{R}$ é categórico?

   (e) Mostre que cada axioma de $\mathcal{R}$ é independente.

8. Seja X um conjunto não vazio qualquer. Uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X chamados abertos de X é uma *topologia* sobre X se os conjuntos de axiomas são satisfeitos:

$T_1 - \emptyset, X \in \mathcal{T}$.

T_2- A união de um número qualquer de conjuntos de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$.

T_3- A interseção de dois conjuntos quaisquer de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$.

(a) Mostre que o conjunto de todos os intervalos abertos da reta real $\mathbb{R}$ é um modelo para $\mathcal{T}$.

(b) O sistema $\mathcal{T}$ é consistente?

(c) O sistema $\mathcal{T}$ é categórico?